# バナッハ空間における射影作用素による最良近似 (非線形解析学と凸解析学の研究)



西白保, 敏彦

数理解析研究所講究録
1187 巻 2001 年 118-130



# バナッハ空間における射影作用素による最良近似

琉球大・理　西白保敏彦 (Toshihiko Nishishiraho)

## 1. 序

$(X, \|\cdot\|_X)$ をバナッハ空間とし, $B[X]$ は $X$ からそれ自身への有界線形作用素全体の成す通常の作用素ノルム $\|\cdot\|_{B[X]}$ をもつバナッハ環を表す. $\mathbb{Z}$ はすべての整数全体の集合を表し, $\mathbb{N}$ は非負の整数全体の集合を表す. $\mathfrak{P} = \{P_j : j \in \mathbb{Z}\}$ は $B[X]$ に属する射影作用素の列で次の条件を満たすとする:

(P-1)　$P_j P_n = \delta_{j,n} P_j$　$(\forall j, n \in \mathbb{Z})$. ここで, $\delta_{j,n}$ は Kronecker のデルタ関数を表す.

(P-2)　$\cup_{j\in\mathbb{Z}} P_j(X)$ で生成される線形部分空間は $X$ で稠密である.

(P-3)　すべての $j \in \mathbb{Z}$ に対して, $P_j(f) = 0$ ならば $f = 0$ である.

各 $n \in \mathbb{N}$ に対して, $M_n$ は $\{P_j(X) : |j| \le n\}$ で生成される $X$ の線形部分空間を表す. これは $X$ の閉線形部分空間である.

$\mathfrak{T}_n$ を $X$ から $M_n$ への有界線形作用素 $T$ で, すべての $f \in M_n$ に対して $T(f) = f$ であるものの全体の集合とする. 換言すれば, これは $X$ から $M_n$ の上への有界線形射影作用素全体の集合である. また, $\mathfrak{T}_n$ は $B[X]$ の閉線形多様体である, すなわち, $\mathfrak{T}_n$ は $B[X]$ の閉部分集合で任意の $S, T \in \mathfrak{T}_n$ と任意のスカラー $\alpha$ に対して, $\alpha S + (1-\alpha)T \in \mathfrak{T}_n$ が成り立つ. 従って, 特に $\mathfrak{T}_n$ は閉凸集合であ.

本講演の目的は, 適当な条件の下で $\mathfrak{T}_n$ による最良近似と $M_n$ による最良近似度に関するいくつかの否定的な特性について考える. 応用として, マルチプライヤー作用素, 合成積作用素の最良近似及び斉次バナッハ空間における三角多項式による最良近似について述べる. 詳細な取り扱いについては, [14], [15] を参照. また, ノルム空間における最良近似理論の解説については, [16] を参照.

## 2. 射影作用素による最良近似

$(\Omega, \mu)$ を確率測度空間とする. $\mathfrak{T} = \{T_t : t \in \Omega\}$ 及び $\mathfrak{U} = \{U_t : t \in \Omega\}$ を $B[X]$ の一様有界な族ですべての $f \in X$ とすべての $T \in B[X]$ に対して, 写像 $t \mapsto T_t T U_t(f)$ が $\Omega$ 上で強 $\mu$-可測であるとする. 任意の $T \in B[X]$ に対して

$$\Phi_T(f) = \Phi_T(\mathfrak{T}, \mathfrak{U}; f) = \int_\Omega T_t T U_t(f)\, d\mu(t) \qquad (\forall f \in X)$$

と定義する．この右辺の積分は, Bocher 積分として常に存在して$\Phi_T \in B[X]$ で,

$$\|\Phi_T\|_{B[X]} \leq AB\|T\|_{B[X]}$$

が成り立つ．ここで,

$$A = \sup\{\|T_t\|_{B[X]} : t \in \Omega\} < \infty \tag{1},$$

$$B = \sup\{\|U_t\|_{B[X]} : t \in \Omega\} < \infty \tag{2}$$

である．$B[X]$ の部分族$\mathfrak{F}$に対して, その可換子環を$\mathfrak{F}'$で表す．すなわち,

$$\mathfrak{F}' = \{S \in B[X] : ST = TS, \forall T \in \mathfrak{F}\}.$$

今後, 次の条件を仮定する:

$$\mathfrak{P} \subseteq \mathfrak{T}', \tag{3}$$

$$\mathfrak{P} \subseteq \mathfrak{U}', \tag{4}$$

$$T_tU_t = I \qquad (\forall t \in \Omega). \tag{5}$$

ここで, $I$は恒等作用素を表す．

**補題 1** $T \in B[X]$ とする．もし$T \in \mathfrak{T}' \cup \mathfrak{U}'$ならば, $\Phi_T = T$である．

**証明** すべての$t \in \Omega$に対して, $T_tT = TT_t$と仮定する．このとき, (5) によって, 任意の $f \in X$に対して,

$$\Phi_T(f) = \int_\Omega (TT_t)U_t(f)\, d\mu(t) = \int_\Omega TI(f)\, d\mu(t) = T(f)$$

が成立する．すべての $t \in \Omega$に対して, $U_tT = TU_t$ である場合も同様である．

各 $n \in \mathbb{N}$ に対して,

$$S_n = \sum_{j=-n}^{n} P_j$$

と定義する．このとき, $S_n$は$\mathfrak{T}_n$に属し, (3) と (4) によって,

$$S_n \in \mathfrak{T}' \cap \mathfrak{U}' \qquad (\forall n \in \mathbb{N}). \tag{6}$$

**補題 2** $T \in \mathfrak{T}_n$ならば, $\Phi_T \in \mathfrak{T}_n$である．

**証明** $f \in X$とする．$TU_t(f)$ は $M_n$に属するから,

$$TU_t(f) = S_n(TU_t(f)) \qquad (\forall t \in \Omega)$$

である．従って, (6) によって,

$$\Phi_T(f) = \int_\Omega T_t(S_n(TU_t(f)))\, d\mu(t) = \int_\Omega S_n(T_tTU_t(f))\, d\mu(t)$$

$$= S_n\Big(\int_\Omega T_t T U_t(f)\,d\mu(t)\Big) = S_n(\Phi_T(f))$$

が成立する. 故に, $\Phi_T$は$X$から$M_n$への写像である. また, 任意の$g \in M_n$に対して, 再び (6) によって

$$U_t(g) = U_t(S_n(g)) = S_n(U_t(g)) \qquad (\forall\, t \in \Omega)$$

であるから,

$$T(U_t(g)) = T(S_n U_t(g)) = S_n U_t(g) = U_t(g) \qquad (\forall\, t \in \Omega)$$

である. 故に, (5) によって,

$$\Phi_T(g) = \int_\Omega T_t T U_t(g)\,d\mu(t)$$

$$= \int_\Omega T_t U_t(g)\,d\mu(t) = \int_\Omega I(g)\,d\mu(t) = g \qquad (\forall\, g \in M_n).$$

よって, $\Phi_T$は$\mathfrak{T}_n$に属する.

各$n \in \mathbb{N}$に対して,

$$\mathfrak{T}_n^* = \{T \in \mathfrak{T}_n : \Phi_T P_j = 0,\ \forall\, j \in \mathbb{Z}, |j| > n\}$$

とおく. このとき, これは閉凸集合になり, 条件 (P-1), (6) 及び補題 1 によって, $S_n$は$\mathfrak{T}_n^*$に属する.

**補題 3** $T \in \mathfrak{T}_n^*$ならば, $\Phi_T = S_n$ である.

**証明** $T \in \mathfrak{T}_n$は

$$\Phi_T P_j = 0 \qquad (\forall\, j \in Z, |j| > n) \tag{7}$$

を満たすとする. $\Phi_T$と$S_n$は共に$X$上の連続な線形写像であるから, 条件 (P-2) に鑑み

$$\Phi_T(P_j(f)) = S_n(P_j(f)) \qquad (\forall\, f \in X, \forall\, j \in \mathbb{Z})$$

を示せば十分である. もし$|j| \le n$ならば, $S_n(P_j(f)) = P_j(f)$ でありそして補題 2 によって, $\Phi_T(P_j(f)) = P_j(f)$ が成り立つ. また, $|j| > n$ ならば, 条件 (P-1), (7) によって

$$S_n(P_j(f)) = \sum_{k=-n}^{n} P_k(P_j(f)) = \sum_{k=-n}^{n} \delta_{k,j} P_j(f) = 0 = \Phi_T(P_j(f))$$

となる.

$\mathfrak{M}$を$B[X]$の部分集合とする. 各$S \in B[X]$に対して,

$$E_{\mathfrak{M}}(S) = \inf\{\|S - T\|_{B[X]} : T \in \mathfrak{M}\}$$

と定義し, これを $\mathfrak{M}$ に関する $S$の最良近似度という. この下限が $\mathfrak{M}$ のある作用素 $U$で到達されるとき, すなわち,

$$U \in \mathfrak{M}, \ E_{\mathfrak{M}}(S) = \|S - U\|_{B[X]}$$

となるような $U$が存在するとき, $U$を $\mathfrak{M}$ に関する $S$の最良近似という.

**定理 1** $S \in \mathfrak{U}'$とする. このとき,

$$\|S - S_n\|_{B[X]} \leq ABE_{\mathfrak{T}_n^*}(S) \tag{8}$$

が成り立つ. 特に, $AB \leq 1$ ならば $S_n$は $\mathfrak{T}_n^*$に関する $S$の最良近似である.

**証明** $f \in X, T \in \mathfrak{T}_n^*$とする. このとき, 補題 3 と (5) によって,

$$(S - S_n)(f) = (S - \Phi_T)(f) = \int_\Omega (S - T_t T U_t)(f)\, d\mu(t)$$

$$= \int_\Omega (T_t U_t S - T_t T U_t)(f)\, d\mu(t) = \int_\Omega (T_t S U_t - T_t T U_t)(f)\, d\mu(t)$$

$$= \int_\Omega (T_t(S - T)U_t)(f)\, d\mu(t) = \Phi_{S-T}(f)$$

が成立する. 従って,

$$\|S - S_n\|_{B[X]} = \|\Phi_{S-T}\|_{B[X]} \leq AB\|S - T\|_{B[X]}$$

となり, (8) が成り立つ.

**系 1** $\alpha$をスカラーとするとき,

$$\|\alpha I - S_n\|_{B[X]} \leq ABE_{\mathfrak{T}_n^*}(\alpha I)$$

が成り立つ. 特に, $AB \leq 1$ ならば $S_n$は $\mathfrak{T}_n^*$に関する$\alpha I$の最良近似である.

$\mathfrak{V} = \{V_t : t \in \Omega\}$ を $B[X]$ の一様有界な族で各 $f \in X$に対して, 写像 $t \mapsto V_t(f)$ は$\Omega$上で強$\mu$-可測であるとする. また, $\chi$は$\Omega$上の$\mu$-可積分な関数とし $W \in B[X]$ とする. このとき,

$$(\chi * W)(f) = \int_\Omega \chi(t) V_t(W(f))\, d\mu(t) \tag{9}$$

は常に Bocher 積分として存在する (cf. [6], [8]). これを$\chi$と $W$からつくられる合成積作用素という. $\chi * W \in B[X]$ であり,

$$\|\chi * W\|_{B[X]} \leq C\|\chi\|_1 \|W\|_{B[X]}$$

が成立する. ここで,

$$C = \sup\{\|V_t\|_{B[X]} : t \in \Omega\} < \infty, \quad \|\chi\|_1 = \int_\Omega |\chi(t)|\, d\mu(t) < \infty$$

である.

**系 2** $\mathfrak{V}\subseteq\mathfrak{U}', W\in\mathfrak{U}'$とする. このとき,

$$\|\chi * W - S_n\|_{B[X]} \le ABE_{\mathfrak{T}_n^*}(\chi * W)$$

が成り立つ. 特に, $AB\le 1$ ならば $S_n$は $\mathfrak{T}_n^*$に関する$\chi * W$の最良近似である.

## 3. 最良近似度に関する否定的特性

この節では, 最良近似度に関してある望ましい性質をもつ作用素の構成が不可能であることについて考える. そのために, 任意の $f\in X$に対して,

$$E_n(f) = E_n(X;f) = \inf\{\|f-g\|_X : g\in M_n\}$$

と定義し, これを $M_n$に関する $f$の最良近似度という. $\{E_n(f) : n\in\mathbb{N}\}$ は $n$ と共に単調に減少し, 条件 (P-2) によって,

$$\lim_{n\to\infty} E_n(f) = 0 \qquad (\forall f\in X) \tag{10}$$

である. $E_n(f)$ の 0 に近づく速度の大きさと $f$の持つある種の滑らかさの性質とは関係が深い (cf. [8], [9], [10], [11], [12], [13]).

以下, 本節では

$$\limsup_{n\to\infty} \|S_n\|_{B[X]} = +\infty \tag{11}$$

と仮定する.

**定理 2** 各 $n\in\mathbb{N}$ に対して, $L_n\in\mathfrak{T}_n^*$ とする. このとき, ある $f_0\in X$が存在して $\{\|L_n(f_0)\|_X\}$ は非有界である.

**証明** 系 1 で$\alpha=0$ の場合を考えると,

$$\|S_n\|_{B[X]} \le AB\|L_n\|_{B[X]} \qquad (\forall n\in N)$$

が成立する. 従って, (11) と一様有界性の定理から望む結果を得る.

**定理 3** 各 $n\in\mathbb{N}$ に対して, $L_n$は $X$から $M_n$への有界な線形作用素で $|j|>n$ となるすべての $j\in\mathbb{Z}$ に対して, $L_nP_j=0$ とする. このとき, $[0,\infty)$ 上で定義された非負の連続関数$\rho$で$\rho(0)=0$ 及び

$$\|L_n(f)-f\|_X \le \rho(E_n(f)) \qquad (\forall f\in X,\ \forall n\in\mathbb{N}) \tag{12}$$

を満たすものは存在しない.

**証明** $\rho : [0,\infty) \to [0,\infty)$ は連続で$\rho(0) = 0$ と (12) を満たすとする. このとき, (10) と (12) によって,

$$\lim_{n\to\infty} \|L_n(f) - f\|_X = 0 \qquad (\forall f \in X).$$

再び, (12) によって,

$$\|L_n(g) - g\|_X \le \rho(E_n(g)) = \rho(0) = 0 \qquad (\forall g \in M_n,\, n \in \mathbb{N})$$

であるから, $L_n$は$\mathfrak{T}_n^*$に属する. これは定理 2 と矛盾する.

**系 3** 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して, $L_n$は定理 3 の通りとする. このとき,

$$\|L_n(f) - f\|_X \le KE_n(f) \qquad (\forall f \in X,\ \forall n \in \mathbb{N})$$

となる定数 $K > 0$ は存在しない.

## 4. 応用

任意 $f \in X$に対して, その $\{P_j\}$ に関する (形式的な) フーリエ級数

$$f \quad \sim \quad \sum_{j=-\infty}^{\infty} P_j(f) \tag{13}$$

を考える. 従って, 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して, $S_n$はフーリエ級数 (13) の第 $n$ 部分和作用素である. $T \in B[X]$ が $X$上のマルチプライヤー作用素であるとは, スカラー列 $\{\tau_j : j \in \mathbb{Z}\}$ が存在してすべての $f \in X$ に対して,

$$T(f) \quad \sim \quad \sum_{j=-\infty}^{\infty} \tau_j P_j(f)$$

が成り立つことである. そして, 次の表示法を用いる:

$$T \quad \sim \quad \sum_{j=-\infty}^{\infty} \tau_j P_j.$$

(cf. [1], [6], [7], [19]). $M[X]$ は $X$上のすべてのマルチプライヤー作用素全体の集合を表す. これは$I$及び$S_n$ ($\forall n \in \mathbb{N}$) を含む $B[X]$ の可換な閉部分環である.

今後, $\Omega$は可分な位相空間で$\mu$は$\Omega$上のボレル確率測度とする. $\mathfrak{T} = \{T_t : t \in \Omega\}, \mathfrak{U} = \{U_t : t \in \Omega\}$ は $M[X]$ に属する縮小作用素の列で,

$$T_t \quad \sim \quad \sum_{j=-\infty}^{\infty} e_j(t) P_j \qquad (\forall t \in \Omega), \tag{14}$$

$$U_t \quad \sim \quad \sum_{j=-\infty}^{\infty} f_j(t) P_j \qquad (\forall\, t \in \Omega) \tag{15}$$

とする. ここで, $\{e_j : j \in \mathbb{Z}\}, \{f_j : j \in \mathbb{Z}\}$ は, 共に$\Omega$上のスカラー値連続関数列で

$$e_j(t) f_j(t) = 1 \qquad (\forall\, j \in \mathbb{Z},\, t \in \Omega) \tag{16}$$

を満たすとする. (14) によって, すべての $g \in P_j(X)$ $(\forall\, j \in \mathbb{Z})$ に対して,

$$\lim_{t \to u} \|T_t(g) - T_u(g)\|_X = \lim_{t \to u} |e_j(t) - f_j(t)| \|g\|_X = 0 \qquad (\forall\, u \in \Omega)$$

である. よって, 条件 (P-2) と $\mathfrak{T}$ の一様有界性により各 $f \in X$に対して, 写像 $t \mapsto T_t(f)$ は$\Omega$上で強連続である. 同様に, 各 $f \in X$に対して, 写像 $t \mapsto U_t(f)$ も$\Omega$上で強連続である. 従って, 任意の $f \in X, T \in B[X]$ に対して, 写像 $t \mapsto T_t T U_t(f)$ は$\Omega$上で強連続である. また, (14), (15), (16) 及び (P-3) に鑑み, 条件 (3), (4) 及び (5) が成り立つ. よって, 結局, 上記の設定の下で前節までに得られたすべての結果が成立する.

さて, 以下では, 関数列 $\{e_j\}, \{f_j\}$ は

$$\int_\Omega e_j(t) f_j(t)\, d\mu(t) = 0 \qquad (\forall\, j, k \in \mathbb{Z}, j \neq k) \tag{17}$$

を満たすとする.

**補題 4** $\mathfrak{T}_n^* = \mathfrak{T}_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

**証明** すべての$T \in \mathfrak{T}_n$が (7) を満たすことを示せば十分である. $j \in \mathbb{Z}, |j| > n, f \in X$ とする. このとき, (14), (15), (17) によって

$$\begin{aligned}
\Phi_T(P_j(f)) &= \int_\Omega T_t T U_t(P_j(f))\, d\mu(t) \\
&= \int_\Omega (T_t T)(P_j U_t(f))\, d\mu(t) = \int_\Omega (T_t T(f_j(t) P_j(f))\, d\mu(t) \\
&= \int_\Omega f_j(t) T_t(T P_j(f))\, d\mu(t) = \int_\Omega f_j(t) T_t(S_n(T P_j(f)))\, d\mu(t) \\
&= \int_\Omega f_t(t) S_n(T_t T P_j(f))\, d\mu(t) = \sum_{k=-n}^{n} \int_\Omega f_j(t) P_k(T_t T P_j(f))\, d\mu(t) \\
&= \sum_{k=-n}^{n} \int_\Omega f_j(t) e_k(t) P_k(T P_j(f))\, d\mu(t) \\
&= \sum_{k=-n}^{n} \left\{ \int_\Omega f_j(t) e_k(t)\, d\mu(t) \right\} P_k(T P_j(f)) = 0.
\end{aligned}$$

よって, (7) が成立する.

**定理 4** $S \in M[X], n \in \mathbb{N}$ とする．このとき，$S_n$は$\mathfrak{T}_n$に関する$S$の最良近似である．

**証明** すべての$t \in \Omega$に対して，$S$は$T_t$と可換であるから，これは補題 4 と定理 1 から従う．

$\mathfrak{V} = \{V_t : t \in \Omega\}$ は $M[X]$ に属する縮小作用素列で

$$V_t \quad \sim \quad \sum_{j=-\infty}^{\infty} v_j(t) P_j \tag{18}$$

とする．ここで，$\{v_j : j \in \mathbb{N}\}$ は$\Omega$上のスカラー値連続関数列である．$\chi$は$\Omega$上の$\mu$-可積分関数とし$W$は$M[X]$ に属する作用素で

$$W \quad \sim \quad \sum_{j=-\infty}^{\infty} \omega_j P_j$$

とする．このとき，(9) によって定義された合成積作用素 $\chi * W$は$M[X]$ に属し，

$$\chi * W \quad \sim \quad \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j(\mathfrak{V}, \chi) \omega_j P_j \tag{19}$$

が成り立つ．ここで，

$$c_j(\mathfrak{V}, \chi) = \int_{\Omega} \chi(t) v_j(t)\, d\mu(t) \qquad (\forall j \in \mathbb{Z})$$

である．従って，定理 4 から次の系を得る．

**系 4** 各$n \in \mathbb{N}$ に対して，$S_n$は$\mathfrak{T}_n$に関する$\chi * W$の最良近似である．

**定理 5** $\alpha$をスカラーとし，$n \in \mathbb{N}$ とする．このとき，$S_n$は$\mathfrak{T}_n$に関する$\alpha I$の最良近似である．

**証明** これは補題 4 と系 1 から従う．

**注意 1** $\Omega = \mathbb{R}, e_j(t) = e^{\lambda_j t}\ (\forall j \in \mathbb{Z}, t \in \mathbb{R})$ とする．ここで，$\{\lambda_j : j \in \mathbb{Z}\}$ はスカラー列である．このとき，(14) は

$$T_t \quad \sim \quad \sum_{j=-\infty}^{\infty} e^{\lambda_j t} P_j \qquad (\forall t \in \mathbb{R}) \tag{20}$$

で，$\mathfrak{T} = \{T_t : t \in \mathbb{R}\}$ は $B[X]$ における強連続な作用素群となる．また，$\mathfrak{T}$ の生成作用素を $G$ とし，その定義域を $D(G)$ すれば

$$G(f) \quad \sim \quad \sum_{j=-\infty}^{\infty} \lambda_j P_j(f) \qquad (\forall f \in D(G))$$

が成立する ([6, Proposition 2] 参照)．

$\Omega = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$. このとき, (16) と (20) に鑑み, (15) は

$$U_t \sim \sum_{j=-\infty}^{\infty} e^{-\lambda_j t} P_j \qquad (\forall\, t \in [a, b])$$

となる. また, (16) 及び (17) を満たす関数列 $\{e_j\}, \{f_j\}$ の典型的な例は次の通りである:

$$e_j(t) = e^{-im_j\varphi(t)}, \quad f_j(t) = e^{im_j\varphi(t)} \qquad (\forall\, t \in [a, b],\ j \in \mathbb{Z}).$$

ここで,

$$\varphi(t) = \frac{2\pi}{b-a}\Big(t - \frac{1}{2}(b-a)\Big)$$

で, $\{m_j : j \in \mathbb{Z}\}$ は, $j \neq k$となるすべての $j, k \in \mathbb{Z}$ に対して $m_j \neq m_k$を満たす整数列である.

次に, システム $\mathfrak{G} = \{g_j, g_j^*\}_{j\in\mathbb{Z}}$を考える. 但し, $\{g_j : j \in \mathbb{Z}\}$ と $\{g_j^* : j \in \mathbb{Z}\}$ はそれぞれ $X$と $X^*$($X$の共役空間) の中の要素列で次の条件を満たすとする (cf. [5], [18]):

(G-1) $\{g_j : j \in \mathbb{Z}\}$ で生成される線形部分空間は $X$で稠密である.

(G-2) すべての $j \in \mathbb{Z}$ に対して, $g_j^*(f) = 0$ ならば $f = 0$ である.

(G-3) $g_j^*(g_n) = \delta_{j,n} \quad (\forall\, j, n \in \mathbb{Z})$.

このとき,

$$P_j(f) = g_j^*(f) g_j \qquad (\forall j \in Z, f \in X)$$

と定義すれば, $\mathfrak{P} = \{P_j : j \in \mathbb{Z}\}$ は条件 (G-1), (G-2) 及び (G-3) を満足する. 従って, この設定の下で定理 4, 系 4 及び定理 5 が適用される.

最後に, $X$が斉次バナッハ空間の場合を考えよう. 即ち, $X$は次の条件を満たす関数空間である (cf. [3], [6], [17], [20]):

(H-1) $X$は $L^1_{2\pi}$の線形部分空間でそれ自身ノルム $\|\cdot\|_X$を持つバナッハ空間である.

(H-2) ある定数 $K > 0$ が存在して, $\|f\|_1 \leq K\|f\|_X$ $(\forall f \in X)$ である.

(H-3) 右移動作用素を $T_t(f)(\cdot) = f(\cdot - t)$ $(\forall f \in X)$ によって定義するとき, 各 $t \in \mathbb{R}$ に対して $T_t$は $B[X]$ に属する等距離的作用素である.

(H-4) 任意の $f \in X$に対して, 写像 $t \mapsto T_t(f)$ は $\mathbb{R}$ 上で強連続である.

斉次バナッハ空間の典型的な例は次の通りである:

$C_{2\pi}$ ($\mathbb{R}$ 上の周期 $2\pi$を持つ連続関数全体のなすバナッハ空間で, 各 $f \in C_{2\pi}$のノルムは

$$\|f\|_\infty = \max\{|f(t)| : |t| \leq \pi\}$$

である);

$L^p_{2\pi}$, $1 \le p < \infty$ ($\mathbb{R}$ 上で周期 $2\pi$を持ち, 且つ $[-\pi, \pi]$ で $p$ 乗絶対ルベーグ可積分関数全体のなすバナッハ空間で, 各 $f \in L^p_{2\pi}$のノルムは

$$\|f\|_p = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^p\,dt\right)^{1/p}$$

である). その他の例については, [6] (cf. [3], [17], [20]) を参照.

さて,

$$(\Omega, \mu) = \left([-\pi, \pi], \frac{1}{2\pi}dt\right), \quad e_j(t) = e^{-ijt}, \quad f_j(t) = g_j(t) = e^{ijt},$$

$$g_j^*(f) = \hat{f}(j) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ijt}\,dt$$

($f$の第 $n$ 次フーリエ係数) とする (注意 1 参照). このとき, $M_n$は $n$ 次以下の三角多項式全体から成る $X$の閉線形部分空間であり, $\mathfrak{T}_n$は $X$から $M_n$の上の有界線形射影作用素の全体から成る $B[X]$ の閉線形多様体である. また, $U_t = T_{-t}$, $\|T_t\|_{B[X]} = \|U_t\|_{B[X]} = 1$ $(\forall t \in [-\pi, \pi])$ である. $\mathfrak{V} = \mathfrak{T}$, $\chi \in L^1_{2\pi}$とする. このとき,

$$(\chi * I)(f)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \chi(t)f(x-t)\,dt \qquad (\forall f \in X)$$

である. 従って, 系 4 及び定理 5 から次の結果が得られる.

**定理 6** $n \in \mathbb{N}, \chi \in L^1_{2\pi}, \alpha$ をスカラーとする. このとき, 次の事が成立する:

(a) $S_n$は$\mathfrak{T}_n$に関する$\chi * I$の最良近似である.

(b) $S_n$は$\mathfrak{T}_n$に関する$\alpha I$の最良近似である.

補題 4 によって, $\mathfrak{T}_n^* = \mathfrak{T}_n$であるから, 3 節で得られた結果は, $C_{2\pi}$における三角多項式による最良近似度に関する否定的特性を与える古典的な Kharshiladze-Lozinski の定理, Faber の定理, Berman の定理 ([2, 第 6 章 5 節], [4, 第 7 章 3 節] 参照) を一般の斉次バナッハ空間の場合へ拡張する (詳細は [15] 参照).

最後に, 定理 6 (a) における関数$\chi$の幾つかの例を挙げる. これらは, 合成積線形近似法を取り扱う際に重要な役割を果たす ([16, 第 6,7 章参照).

1° (Fejér) $\alpha > 0, \in \mathbb{N}$ とし,

$$\chi(t) = F_{m,\alpha}(t) = \sum_{j=-m}^{m} \frac{A^{(\alpha)}_{m-|j|}}{A^{(\alpha)}_m} e^{ijt} = 1 + 2\sum_{j=1}^{m} \frac{A^{(\alpha)}_{m-j}}{A^{(\alpha)}_m}\cos jt.$$

ここで,

$$A^{(\beta)}_m = \binom{m+\beta}{m} = \frac{(\beta+1)(\beta+2)\cdots(\beta+m)}{m!}, \quad \beta > -1.$$

特に,

$$F_m(t) = F_{m,1}(t) = \sum_{j=-m}^{m}\left(1 - \frac{|j|}{m+1}\right)e^{ijt} = 1 + 2\sum_{j=1}^{m}\left(1 - \frac{j}{m+1}\right)\cos jt$$

$$= \frac{1}{m+1}\left\{\frac{\sin\frac{1}{2}(m+1)t}{\sin\frac{1}{2}t}\right\}^2.$$

2° (Riesz) $m \in \mathbb{N}, \kappa, \lambda > 0$ とし,

$$\chi(t) = r_{m,\kappa,\lambda}(t) = \sum_{j=-m}^{m}\left(1 - \left|\frac{j}{m+1}\right|^{\kappa}\right)^{\lambda} e^{ijt}.$$

3° (de la Vallée-Poussin) $m \in \mathbb{N}$ とし,

$$\chi(t) = v_m(t) = 1 + 2\sum_{j=1}^{m}\frac{(m!)^2}{(m-j)!(m+j)!}\cos jt = \frac{(m!)^2}{(2m!)}\left(2\cos\frac{1}{2}t\right)^{2m}.$$

4° (Jackson) $m \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, r \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$ とし,

$$\chi(t) = j_{m,r}(t) = c_{m,r}m^r\{F_{m-1}(t)\}^r = c_{m,r}\left\{\frac{\sin\frac{1}{2}mt}{\sin\frac{1}{2}t}\right\}^{2r}.$$

ここで, 定数 $c_{m,r} > 0$ は

$$\hat{j_{m,r}}(0) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} j_{m,r}(t)\,dt = 1$$

となるように選ぶ. 特に,

$$j_m(t) = j_{m,2}(t) = c_m m^2\{F_{m-1}(t)\}^2 = c_m\left\{\frac{\sin\frac{1}{2}mt}{\sin\frac{1}{2}t}\right\}^4.$$

ここで,

$$c_m = c_{m,2} = \frac{3}{m(2m^2+1)}.$$

5° (Fejér-Korovkin) $m \in \mathbb{N}$ とし,

$$\chi(t) = K_m(t) = A_m\left|\sum_{j=0}^{m}\lambda_m(j)e^{ijt}\right|^2.$$

ここで,

$$\lambda_m(j) = \sin\left(\frac{j+1}{m+2}\right)\pi \quad (j = 0, 1, 2, \ldots, m), \quad A_m = \left(\sum_{j=0}^{m}\lambda_m^2(j)\right)^{-1}.$$

6° (Gauss-Weierstrass) $\lambda > 0$ とし,

$$\chi(t) = w_\lambda(t) = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}\sum_{j=-\infty}^{\infty}\exp\left\{-\frac{(t-2\pi j)^2}{4\lambda}\right\} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} e^{-\lambda j^2}e^{ijt}.$$

7° (Poisson) $0 \leq r < 1$ とし,

$$\chi(t) = p_r(t) = 1 + 2\sum_{j=1}^{\infty} r^j \cos jt = \frac{1-r^2}{1-2r\cos t + r^2}.$$

## 参考文献


[1] P. L. Butzer, R. J. Nessel and W. Trebels, *On summation processes of Fourier expansinos in Banach spaces. I. Comparison theorems*, Tôhoku Math. J., **24**(1972), 127-140; *II. Saturation theorems*, ibid., 551-569; *III. Jackson- and Zamansky-type inequalities for Abel-bounded expansions*, Tôhoku Math. J., **27**(1975), 213-223.

[2] E. W. Cheney, *Introduction to Approximation Theory*, McGraw-Hill, New York, 1966. 435-439.

[3] Y. Katznelson, *Introduction to Harmonic Analysis*, John Wiley, New York, 1968.

[4] G. G. Lorentz, *Approximation of Functions*, 2nd. ed., Chelsea, New York, 1986.

[5] V. D. Milman, *Geometric theory of Banach spaces I, Theory of bases and minimal systems*, Russian Math. Surveys, **25**(1970), 111-170.

[6] T. Nishishiraho, *Quantitative theorems on linear approximation processes of convolution operators in Banach spaces*, Tôhoku Math. J., **33**(1981), 109-126.

[7] T. Nishishiraho, *Saturation of multiplier operators in Banach spaces*, Tôhoku Math. J., **34** (1982), 23-42.

[8] T. Nishishiraho, *The degree of the best approximation in Banach spaces*, Tôhoku Math. J., **46** (1994), 13-26.

[9] T. Nishishiraho, *Inverse theorems for the best approximation in Banach spaces*, Math. Japon., **43**(1996), 525-544.

[10] T. Nishishiraho, *Converse results for the beat approximation in Banach spaces*, Ryukyu Math. J., **10**(1997), 75-88.

[11] T. Nishishiraho, *Estimates for the degree of best approximation in Banach spaces*, Ryukyu Math. J., **11**(1998), 75-86.

[12] T. Nishishiraho, *General inverse theorems for the best approximation in Banach spaces*, Proceedings of the International Conference on Nonlinear Analysis and Convex Analysis (W. Takahashi and T. Tanaka, eds), World Scientific, 1999, 281-288.

[13] T. Nishishiraho, *General inverse problems for the best approximation in Banach spaces*, Ryukyu. Math. J., **12**(1999), 53-68.

[14] T. Nishishiraho, *The best approximation by projections in Banach spaces*, to appear in Taiwanese J. Math.

[15] T. Nishishiraho, *Negative characters on the degree of the best approximation in Banach spaces*, to appear in Ryukyu Math. J.

[16] 西白保敏彦, 最良近似理論と関数解析, 横浜図書, 2000.

[17] H. S. Shapiro, *Topics in Approximation Theory*, Lecture Notes in Math., **187**, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1971.

[18] I. Singer, *Bases in Banach Spaces I*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1970.

[19] W. Trebels, *Multipliers for $(C,\alpha)$-Bounded Fourier Expansions in Banach spaces and Approximation Theory*, Lecture Notes in Math., **329**, Springer-Verlag, Berlin- Heidelberg- New York, 1973.

[20] H. C. Wang, *Homogeneous Banach Algebras*, Marcel Dekker, Inc., New York-Basel, 1977. J., **12**(1945), 47-76.